Lineær optimering S1, Prøve 1 løsning

Del 1

Tid: 70 min

Hjelpemidler: Skrivesaker

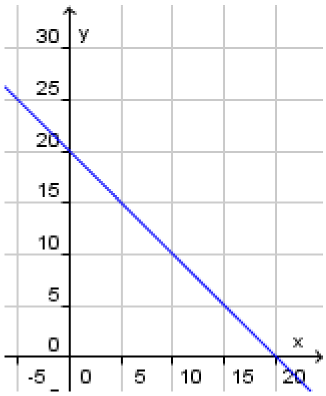
Oppgave 1

a) Tegn linja til likningen $x+y=20$ i et koordinatsystem.

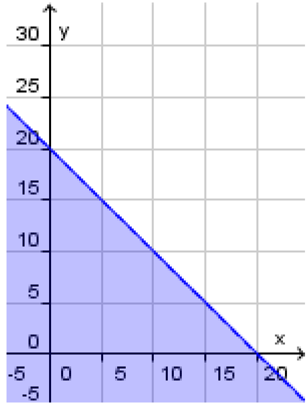
Løser først likningene med hensyn på y.

$x+y=20$

$y=\underline{-x+20}$



b) Skraver det området som er slik at $y\le -x+20$.



c) Finn skjæringspunktene mellom linja og koordinataksene ved regning.

Linjen $y=-x+20$ skjærer andreaksen når $x=0$.

Det betyr at linjen skjærer andreaksen i $y=20$. Skjæringspunktet med andreaksen blir $\underline{\underline{(0,20)}}$.

Linjen $y=-x+20$ skjærer førsteaksen når $y=0$.

Det betyr at linjen skjærer førsteaksen når $-x+20=0 \Rightarrow x=20$.

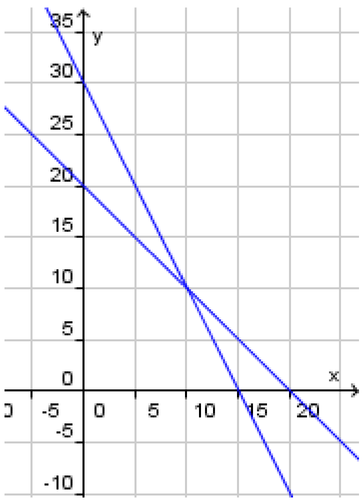
Skjæringspunktet med førsteaksen blir $\underline{\underline{(20,0)}}$

d) Tegn linja til likningen $2x+y=30$ i samme koordinatsystem som ovenfor.

Løser først likningen med hensyn på y.

$2x+y=30$

$y=\underline{-2x+30}$



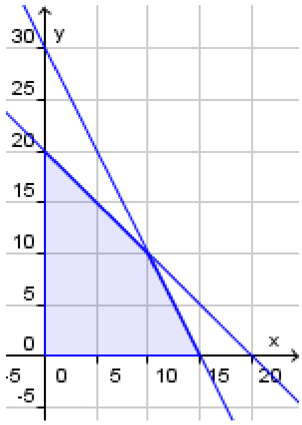
e) Finn skjæringspunktet mellom linjene i a) og d) grafisk og ved regning.

Grafisk: Ser grafisk, se d), at skjæringspunktet er $\underline{\underline{(10\,,\,10)}}$.

Regning:
$$-x+20=-2x+30$$
$$-x+2x=30-20$$
$$x=\underline{\underline{10}}$$

som gir $y=-10+20=\underline{\underline{10}}$

f) Skraver området som er bestemt av ulikhetene
$y\leq -x+20$, $y\leq -2x+30$, $y\geq 0$ og $x\geq 0$.



Oppgave 2

En bonde har en åker der han skal dyrke rosenkål og broccoli. Åkeren er på 20 dekar. Bonden vil bruke x dekar til broccoli og y dekar til rosenkål.

Kostnadene er 6 000 kroner per dekar for broccoli og 3 000 kroner per dekar for rosenkål. Bonden vil ikke bruke mer enn 90 000 kroner på produksjonen av grønnsakene.

a) Forklar at det skraverte området i oppgave 1 f) viser mulige arealfordelinger mellom rosenkål og broccoli.

Den første betingelsen gir $x+y\leq 20 \Rightarrow y\leq -x+20$.

Den andre betingelsen gir $6000x+3000y\leq 90\,000 \Rightarrow y\leq -2x+30$.

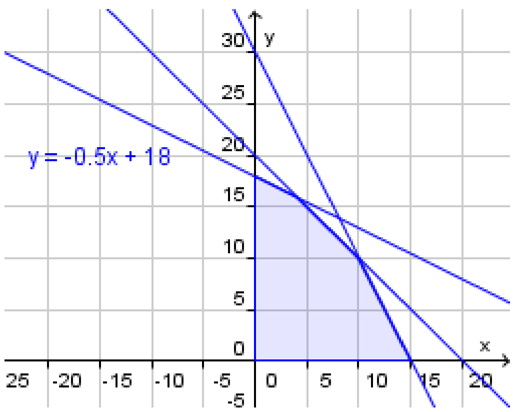
Dessuten vet vi at vi ikke kan ha negative areal.

Bonden regner med å bruke 35 timer per dekar til å dyrke broccoli og 70 timer per dekar til å dyrke rosenkål. Til sammen ønsker han ikke å legge ned mer enn 1260 timer arbeidsinnsats på produksjonen av broccoli og rosenkål.

b) Vis at det gir ulikheten $y\leq -\frac{1}{2}x+18$.

Samlet arbeidsinnsats for å dyrke rosenkål og broccoli må ikke overstige 1260 timer. Vi får:
$$35x+70y\leq 1260$$
$$y\leq -\frac{1}{2}x+18$$

c) Tegn en linje i samme koordinatsystem som ovenfor som viser begrensingen disse opplysningene gir. Skraverer det området som nå gir mulige arealfordelinger mellom rosenkål og broccoli.

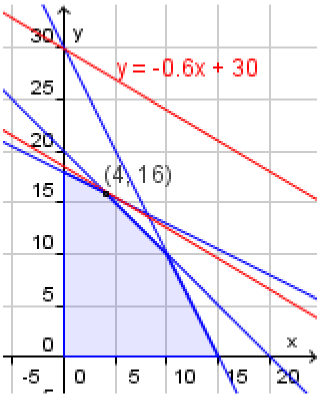


Bonden forventer å få solgt broccoli til 6,00 kroner per kg og rosenkål til 12,50 kroner per kg. Forventet avling av broccoli er 2 500 kg per dekar og forventet avling av rosenkål er 2 000 kg per dekar.

d) Forklar at inntekten, I, i kroner, er gitt ved likningen $I = 15\,000x + 25\,000y$.

$$I = 6{,}00 \cdot 2500 \cdot x + 12{,}50 \cdot 2000 \cdot y$$
$$I = 15\,000x + 25\,000y$$

e) Finn den arealbruken som gir bonden høyest mulig inntekt og bestem denne inntekten.



En inntekt på 750 000 kroner gir likningen
$15\,000x + 25\,000y = 750\,000$

$$y = -\frac{3}{5}x + 30$$

Tegner inn denne linjen i koordinatsystemet ovenfor.

Ingen punkter på denne linjen ligger i det blå området. Det betyr at det ikke er mulig å oppnå denne inntekten.

Vi parallellforskyver linjen til den berører det blå området i ett punkt. Dette punktet representerer den høyest mulige inntekten.

Grafisk avlesning gir koordinatene $(4\ ,16)$. Ved å sette disse verdiene inn i inntektsfunksjonen finner vi den høyeste inntekten.

$$I(4{,}16) = 15\,000 \cdot 4 + 25\,000 \cdot 16$$
$$I(4{,}16) = 460\,000$$

<u>Det betyr at høyest inntekt oppnås med en arealfordeling på 4 dekar med broccoli og 16 dekar rosenkål. Den høyeste inntekten er 460 000 kroner.</u>

Del 2

Tid: 50 min

Hjelpemidler: Alle, unntatt kommunikasjon

Oppgave 3

En hverdagsbunad til jenter kan bestå av skjørt og skjorte. Det er broderier både på skjørtet og på skjorta.

Kari, Anna og Selma produserer slike bunader sammen.

- Kari tar seg av broderiene. Hun bruker tre dager på å brodere et skjørt, og 2 dager på å brodere skjorta.
- Kari kan arbeide inntil 60 dager per år.
- Anna syr skjørt. Hun bruker 2 dager på å sy et skjørt.
- Anna kan arbeide inntil 30 dager per år.
- Selma syr skjorter. Hun bruker to dager på å sy ei skjorte.
- Selma kan arbeide inntil 40 dager per år.

De produserer i alt x skjørt og y skjorter hvert år.

a) Hvilke av ulikhetene må x og y tilfredsstille? Begrunn svarene.

1) $x \geq 0$ og $y \geq 0$
2) $y \leq 40$
3) $y \leq -1,5x + 30$
4) $y \leq 20$
5) $y \leq 15$

Ulikhet 1) setter grenser for det laveste antallet skjørt og skjorter som blir produsert.
Det er ikke mulig å produsere et negativt antall skjørt eller skjorter.

Ulikhet 3) setter grenser for hvor mye Kari kan rekke i løpet av et år.
Hun bruker 3 dager på skjørt og 2 dager på skjorte.
Vi har dermed ulikheten:

$$\begin{aligned} 3x + 2y &\leq 60 \\ 2y &\leq -3x + 60 \\ y &\leq -1,5x + 30 \end{aligned}$$

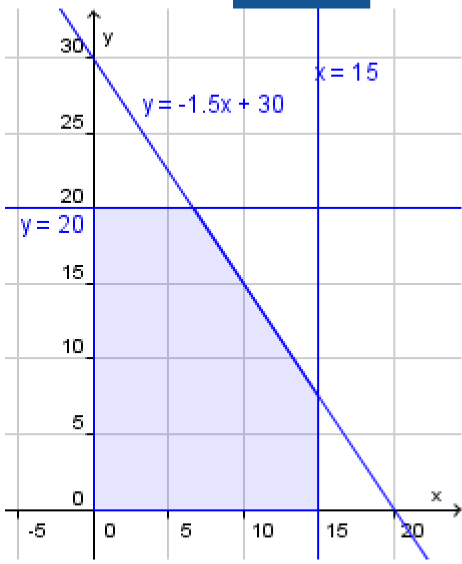
Ulikhet 4) setter grenser for hvor mye Selma kan rekke i løpet av et år.
Hun bruker 2 dager per skjorte.
Vi har dermed ulikheten:

$$\begin{aligned} 2y &\leq 40 \\ y &\leq 20 \end{aligned}$$

Ulikhet 5) setter grenser for hvor mye Anna kan rekke i løpet av et år.

Hun bruker 2 dager på ei skjorte.
Vi har dermed ulikheten:

$$2x \le 30$$
$$x \le 15$$

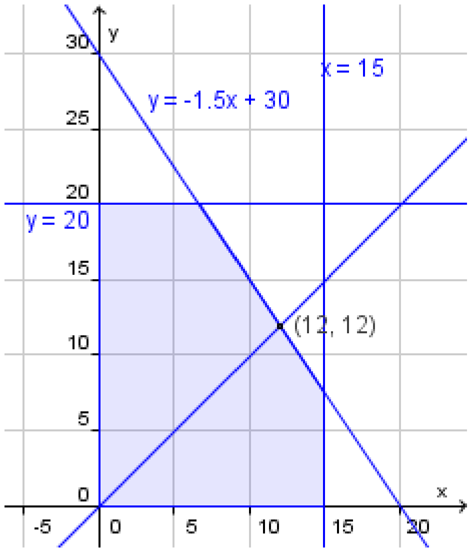


b) Tegn et passende koordinatsystem, og skraver det området som er definert av de aktuelle ulikhetene ovenfor.

Skriver ulikhetene i GeoGebra slik de står, men med likhetstegn i stedet for ulikhetstegn.

c) Forklar hvorfor det er rimelig å ta med betingelsen $x = y$.
Hvis de selger ferdige bunader må de ha like mange skjørt som skjorter.

d) Hvor mange ferdige bunader kan Kari, Anna og Selma produsere i løpet av et år?
Legger inn linja $y = x$ i samme koordinatsystem som ovenfor og finner hvor den går ut av det skraverte området.
<u>De kan til sammen produsere 12 ferdige bunader i løpet av et år.</u>



e) Hvor mange dager arbeider da hver av dem? Og hvor mange dager arbeider de til sammen?
$2 \cdot 12 = 24$
<u>Selma og Anna har arbeidet 24 dager hver.</u>
$3 \cdot 12 + 2 \cdot 12 = 60$
<u>Kari har arbeidet 60 dager.</u>
<u>Til sammen har de arbeidet 108 dager.</u>

De ønsker å øke produksjonen. Ingen av dem har mulighet til å arbeide mer enn det som er angitt i innledningen til oppgaven. Men de tenker at hvis Selma og Anna kan overta noe av arbeidet som bare Kari gjør nå, kan de produsere flere ferdige bunader.

f) Hvor mange ferdige bunader kan de produsere dersom alle kan brodere? Regn med at Selma og Anna broderer like fort som Kari.
Anna kan arbeide 6 dager mer og Selma 16 dager mer, til sammen 22 dager mer. Det går til sammen med $2+2+2+3=9$ dager på å produsere en bunad. Hvis Anna og Kari også kan brodere, kan de klare to hele bunader til.
<u>De kan da til sammen produsere 14 bunader.</u>