Eksamen REA3022 R1, Våren 2010

Del 1

Tid: 2 timer

Hjelpemidler: Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler er tillatt.

Oppgave 1

a) Deriver funksjonene

1) $f(x)=x^3\cdot\ln x$

$$f'(x)=3x^2\cdot\ln x+x^3\cdot\frac{1}{x}=3x^2\cdot\ln x+x^2=\underline{\underline{x^2(3\ln x+1)}}$$

2) $g(x)=4e^{x^2-3x}$

$$g'(x)=4e^{x^2-3x}\cdot(2x-3)=\underline{\underline{4(2x-3)e^{x^2-3x}}}$$

b) Vi har polynomfunksjonen $P(x)=x^3-4x^2-4x+16$

1) Regn ut $P(2)$. Bruk polynomdivisjon til å faktorisere uttrykket $P(x)$ i førstegradsfaktorer.

$P(2)=2^3-4\cdot 2^2-4\cdot 2+16=8-16-8+16=\underline{0}$

Siden $P(2)=0$, vet vi at $(x-2)$ en faktor i uttrykket $x^3-4x^2-4x+16$

Vi utfører polynomdivisjonen

$$\begin{array}{l}
(x^3-4x^2-4x+16):(x-2)=\underline{x^2-2x-8} \\
\underline{-(x^3-2x^2)} \\
\quad -2x^2-4x \\
\quad \underline{-(-2x^2+4x)} \\
\qquad -8x+16 \\
\qquad \underline{-(-8x+16)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Da er $x^3-4x^2-4x+16=\underline{(x-2)(x^2-2x-8)}$

Vi faktoriserer så andregradspolynomet x^2-2x-8

$$x^2-2x-8=0$$

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-8)}}{2\cdot 1}$$

$$x=\frac{2\pm 6}{2}$$

$$x_1=\underline{-2}$$

$$x_2=\underline{4}$$

Vi har da at

$$x^3-4x^2-4x+16=(x-2)(x^2-2x-8)=(x-2)(x+2)(x-4)=\underline{\underline{(x+2)(x-2)(x-4)}}$$

2) Løs ulikheten $P(x)\leq 0$

$P(x)=(x+2)(x-2)(x-4)$

Av det faktoriserte uttrykket ser vi at $P(x)=0$, for $x=-2$, $x=2$ og $x=4$.

Det er bare for disse verdiene av x at $P(x)$ kan skifte fortegn. Vi undersøker hvilket fortegn $P(x)$ har i hvert av de fire intervallene $\langle\leftarrow,-2\rangle$, $\langle -2,2\rangle$, $\langle 2,4\rangle$ og $\langle 4,\rightarrow\rangle$.

Vi bruker det faktoriserte uttrykket.

For $x=-10$ får vi

$$(-10+2)(-10-2)(-10-4)<0$$

For $x=0$ får vi

$$(0+2)(0-2)(0-4)>0$$

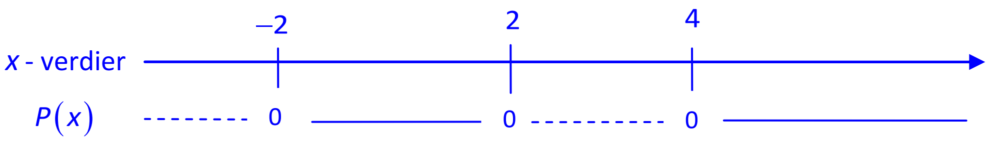
For $x=3$ får vi

$$(3+2)(3-2)(3-4)<0$$

For $x=10$ får vi

$$(10+2)(10-2)(10-4)>0$$

For å få en oversikt setter vi opp et fortegnsskjema.



$P(x) \le 0$ for $\underline{\underline{x \in \langle \leftarrow, -2] \cup [2,4]}}$

c) Nedenfor er gitt to utsagn. Skriv av utsagnene i besvarelsen. I boksen mellom utsagnene skal du sette inn ett av symbolene $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ eller $\Leftrightarrow$.

Per er fra Bergen $\boxed{\Rightarrow}$ Per er fra Norge

Forklar hvordan du har tenkt.

Hvis Per er fra Bergen, må Per være fra Norge, men selv om Per er fra Norge, trenger han ikke være fra Bergen. Vi har derfor implikasjon, men ikke ekvivalens mellom de to utsagnene.

d) Vi har vektoren $\vec{a} = [3,5]$.

1) En vektor $\vec{b}$ er dobbelt så lang som $\vec{a}$ og har motsatt retning av $\vec{a}$.
Skriv $\vec{b}$ på koordinatform.
$\vec{b} = -2\vec{a} = -2[3,5] = \underline{\underline{[-6,-10]}}$

2) Finn koordinatene til en vektor $\vec{c}$ som står normalt på $\vec{a}$.
$[3,5] \cdot [5,-3] = 15 - 15 = \underline{0}$

$\vec{c} = \underline{\underline{[5,-3]}}$

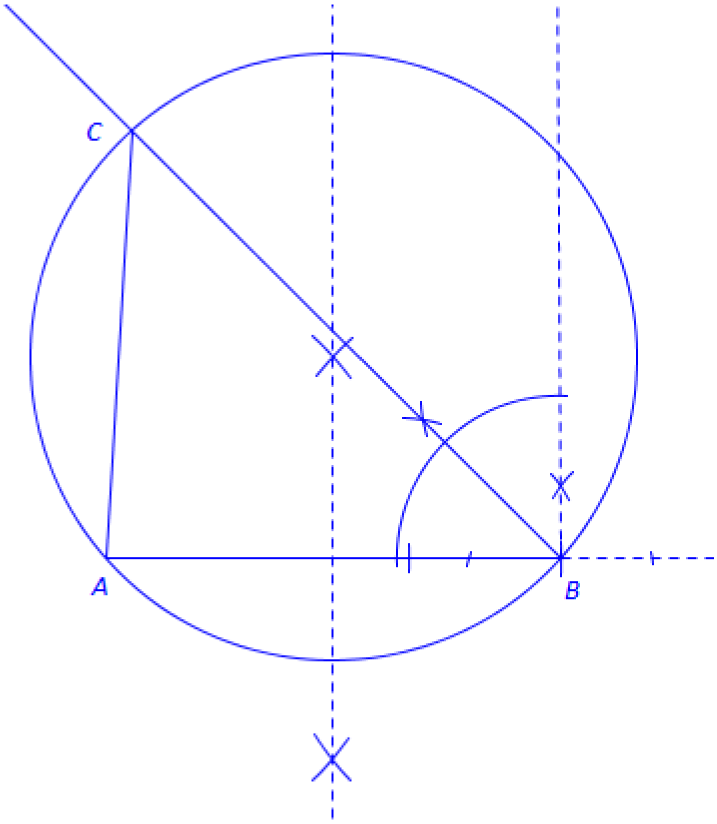
e) Løs likningen $4\cdot\left(1+\dfrac{x}{100}\right)^4=64$

$$\left(1+\frac{x}{100}\right)^4=16$$
$$1+\frac{x}{100}=\pm\sqrt[4]{16}$$
$$1+\frac{x}{100}=\pm 2$$
$$100+x=\pm 200$$
$$x=-100\pm 200$$
$$x_1=\underline{\underline{-300}}$$
$$x_2=\underline{\underline{100}}$$

f) I en sirkel med radius r er det innskrevet en trekant ABC. Lengden til radien er gitt til høyre.

Siden AB i trekanten er $\dfrac{3}{2}r$, og $\angle ABC=45°$.

Konstruer trekanten. Forklar konstruksjonen.



1) Jeg avsatte linjestykket $AB = \frac{3}{2}r$.

2) Jeg opprettet en normal i B, og halverte vinkelen på $90°$ for å få $\angle ABC = 45°$.

3) Jeg opprettet midtnormalen til AB.
Sentrum i den omskrevne sirkelen ligger på denne midtnormalen, med avstand r fra A og fra B.

4) Punktet C ligger i avstand r fra sentrum i sirkelen. Jeg finner C og trekker til slutt linjestykket AC .

Oppgave 2

Den deriverte til en polynomfunksjon f er gitt ved

$$f'(x) = 2(x+1)(x-3)$$

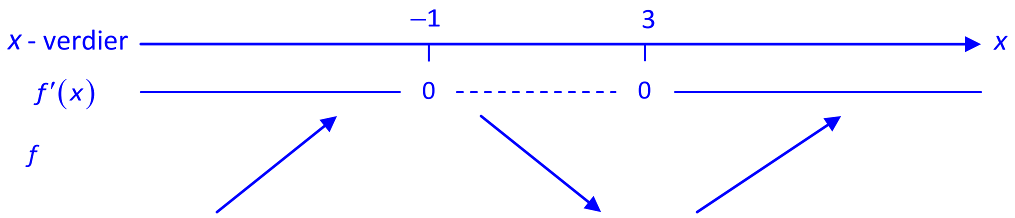
a) Bruk uttrykket over til å finne ut hvor funksjonen vokser, og hvor den avtar. Bestem også førstekoordinatene til topp- og bunnpunktet på grafen til f.

Av det faktoriserte uttrykket, ser vi at nullpunktene til den deriverte er $x=-1$ og $x=3$.

Det er bare for disse verdiene av x at den deriverte kan skifte fortegn. Vi undersøker hvilket fortegn $f'(x)$ har i hvert av de tre intervallene $\langle \leftarrow, -1 \rangle$, $\langle -1, 3 \rangle$ og $\langle 3, \rightarrow \rangle$.

$$f'(-2) = 2(-2+1)(-2-3) > 0$$
$$f'(0) = 2(0+1)(0-3) < 0$$
$$f'(4) = 2(4+1)(4-3) > 0$$

Vi kan da sette opp fortegnslinjen til $f'(x)$



Av fortegnslinjen ser vi at

f vokser for $\underline{\underline{x \in \langle \leftarrow, -1 \rangle \cup \langle 3, \rightarrow \rangle}}$

f avtar for $\underline{\underline{x \in \langle -1, 3 \rangle}}$

Førstekoordinaten til toppunktet er $x = \underline{\underline{-1}}$

Førstekoordinaten til bunnpunktet er $x = \underline{\underline{3}}$

b) Bestem $f''(x)$. Bruk $f''(x)$ til å finne førstekoordinaten til vendepunktet på grafen til f.

$$f'(x) = 2(x+1)(x-3)$$
$$f'(x) = 2(x^2 - 2x - 3)$$
$$f'(x) = 2x^2 - 4x - 6$$

$$f''(x) = \underline{\underline{4x-4}}$$

For å finne førstekoordinaten til vendepunktet, setter vi den dobbeltderiverte lik null.

$$f''(x) = 0$$
$$4x - 4 = 0$$
$$x = \underline{\underline{1}}$$

Den deriverte til en polynomfunksjon g er gitt ved

$$g'(x) = a \cdot (x-b) \cdot (x-c)$$

der konstantene a, b og c alle er positive. Vi antar at $b < c$. Førstekoordinatene til topp- og bunnpunktet på grafen til g er x_{maks} og x_{min}.

c) Forklar hvorfor grafen til g bare kan ha ett vendepunkt. Vis at førstekoordinaten til dette vendepunktet ligger midt mellom x_{maks} og x_{min}.

I vendepunkt er $g''(x) = 0$
Siden den deriverte er en andregradsfunksjon må den dobbelderiverte være en førstegradsfunksjon. En førstegradsfunksjon kan bare ha ett nullpunkt. Derfor kan funksjonen bare ha ett vendepunkt.

Vi finner førstekoordinaten til vendepunktet ved å løse likningen $g''(x) = 0$

$$g'(x) = a \cdot (x-b) \cdot (x-c)$$
$$g'(x) = a(x^2 - cx - bx + bc)$$
$$g'(x) = ax^2 - acx - abx + abc$$

$$g''(x) = \underline{2ax - ac - ab}$$

$$g''(x) = 0$$

$$2ax - ac - ab = 0$$

$$2ax = ac + ab$$

$$x = \frac{ac + ab}{2a}$$

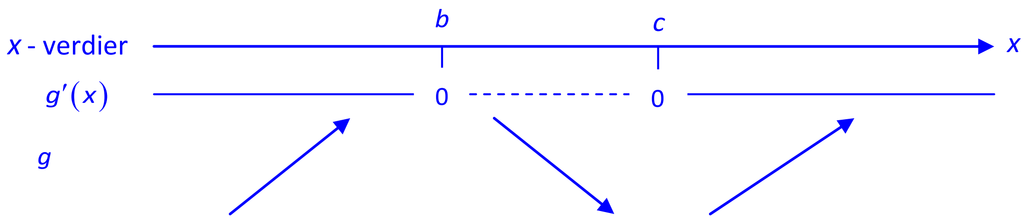
$$x = \frac{a(c + b)}{2a}$$

$$\underline{x = \frac{c + b}{2}}$$

Førstekoordinaten til vendepunktet er $\underline{x = \frac{c + b}{2}}$

Siden $a > 0$, er grafen til den deriverte en parabel med bunnpunkt. Av det faktoriserte uttrykket ser vi også at den deriverte har nullpunkter $x_1 = b$ og $x_2 = c$.

Vi har også at $b < c$ kan da sette opp fortegnslinjen til $g'(x)$



Vi ser at $x_{maks} = b$ og $x_{min} = c$.

Førstekoordinaten til vendepunktet $x = \frac{c + b}{2}$ ligger da midt mellom x_{maks} og x_{min}.

Del 2

Tid: 3 timer

Hjelpemidler: Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.

Oppgave 3

På en tippekupong er det 12 fotballkamper. Når man tipper en enkeltrekke, skal man tippe resultatet i hver av de 12 fotballkampene. Utfallet i en kamp er enten hjemmeseier (H), uavgjort(U) eller borteseier(B).

En ivrig tipper la merke til at det i en viss periode ofte var 5 hjemmeseire (H) blant de 12 kampene på tippekupongen.

a) Hvor mange ulike utvalg på 5 kamper kan velges ut blant 12 kamper?

Antall ulike utvalg på 5 kamper blant 12 kamper er $\binom{12}{5} = \underline{\underline{792}}$

b) Vi har fylt ut 5 kamper som vi tror ender med hjemmeseier. På hvor mange måter kan vi fylle ut de 7 resterende kampene når hver av dem skal fylles ut med enten uavgjort (U) eller borteseier (B)?

Antall måter vi kan fylle ut de 7 resterende på er $2^7 = \underline{\underline{128}}$

c) Hvor stor er sannsynligheten for at en tilfeldig utfylt tipperekke skal inneholde nøyaktig 5 hjemmeseire?

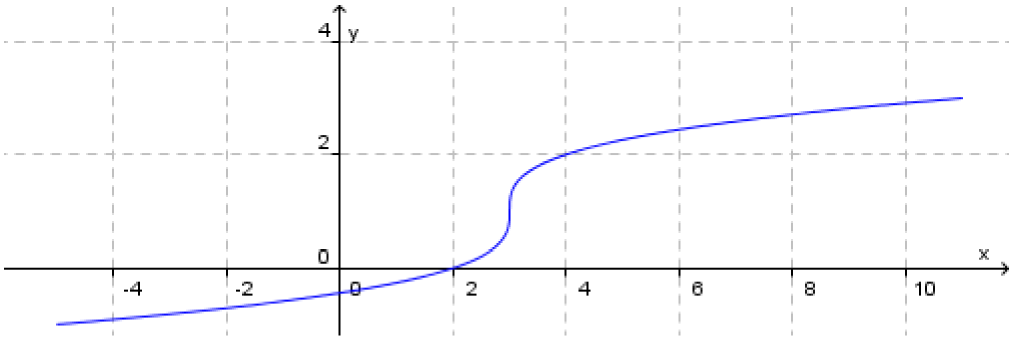
Vi kan bruker resultatene fra a) og b) og tenker at vi har 792 ulike utvalg med 5 kamper og 128 måter å ikke få hjemmeseier på de resterende 7 kampene. Det betyr at det er $792 \cdot 128$ ulike måter å få akkurat 5 hjemmeseire på. Totalt kan vi fylle ut tippekupongen på 3^{12} ulike måter. Vi får da at sannsynligheten for nøyaktig 5 hjemmeseire er $\frac{792 \cdot 128}{3^{12}} \approx \underline{\underline{0{,}191}}$

Oppgave 4

Posisjonsvektoren til en partikkel er gitt ved

$$\vec{r}(t) = \left[t^3 + 3,\ t + 1\right] \qquad \text{det vil si} \qquad \begin{cases} x = t^3 + 3 \\ y = t + 1 \end{cases}$$

a) Tegn grafen til $\vec{r}$ når $t \in [-2, 2]$.



b) Bestem fartsvektoren $\vec{v}(t)$ og akselerasjonsvektoren $\vec{a}(t)$. Marker $\vec{v}(1)$ og $\vec{a}(1)$ på kurven til $\vec{r}$.

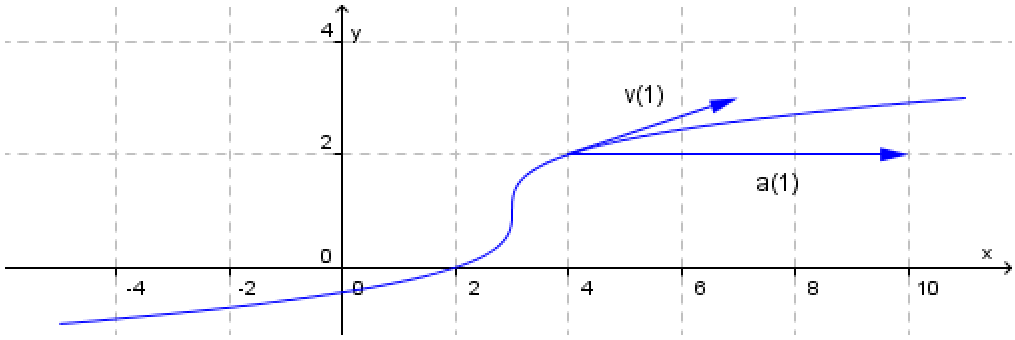
$\vec{r}(t) = \left[t^3 + 3,\ t + 1\right]$

$\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = \underline{\left[3t^2,\ 1\right]}$

$\vec{v}(1) = \underline{\underline{[3,\ 1]}}$

$\vec{a}(t) = \vec{v}\,'(t) = \underline{[6t,\ 0]}$

$\vec{a}(1) = \underline{\underline{[6,\ 0]}}$



c) Finn ved regning det punktet på kurven der $\vec{v}(t)$ er parallell med y-aksen.

$\vec{v}(t) \parallel y-\text{aksen} \Leftrightarrow \vec{v}(t) \perp x-\text{aksen} \Leftrightarrow \left[3t^2, 1\right] \cdot [1,0] = 0$

$$\left[3t^2, 1\right] \cdot [1,0] = 0$$
$$3t^2 = 0$$
$$t = \underline{0}$$

$\vec{r}(0) = [3, 1]$

$\vec{v}(t)$ er parallell med y-aksen i punktet $(3, 1)$.

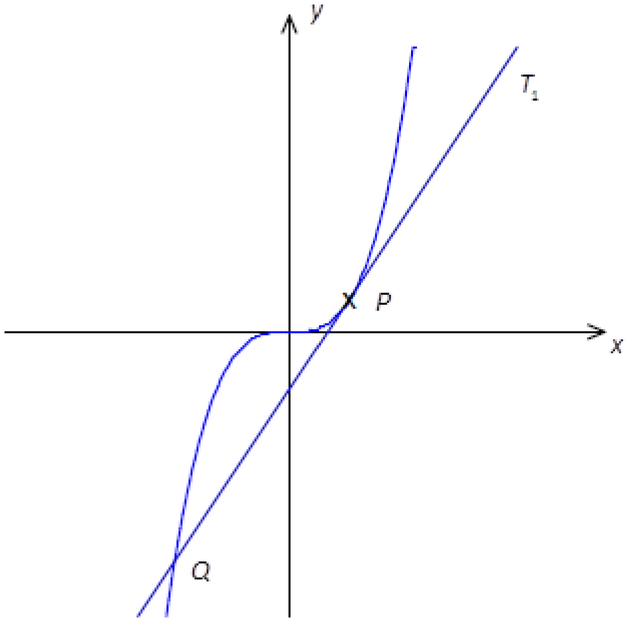
Oppgave 5

Du skal svare på enten alternativ I eller alternativ II.
De to alternativene teller like mye ved vurderingen.

(Dersom besvarelsen din inneholder deler av begge alternativene,
vil bare det du har skrevet på alternativ I, bli vurdert.)

Alternativ I

På figuren ser du en skisse av grafen til funksjonen $f(x) = x^3$ og tangenten T_1 til grafen i punktet $P(1,1)$. På skissen har grafene ulik målestokk.



a) Vis ved regning at likningen til tangenten T_1 er
$y = 3x - 2$

Vi finner den deriverte i tangeringspunktet og bruker ettpunktsformelen for å finne likningen til tangenten

$f'(x) = \underline{3x^2}$
$f'(1) = \underline{3}$

$$y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1)$$
$$y - 1 = 3(x - 1)$$
$$y = \underline{3x - 2}$$

Punktet Q på figuren er et annet fellespunkt mellom grafen til f og T_1.

b) Forklar at førstekoordinaten til Q må være en løsning av likningen

$$x^3 - 3x + 2 = 0$$

Førstekoordinaten må være løsning av den likningen vi får når vi setter $f(x) = y$

$$f(x) = y$$
$$x^3 = 3x - 2$$
$$x^3 - 3x + 2 = 0$$

Bruk polynomdivisjon og løs denne likningen ved regning. Finn koordinatene til Q.

Vi vet at tangenten og grafen til f har et fellespunkt for $x = 1$. Da er $1^3 - 3 \cdot 1 + 2 = 0$ og polynomet på venstre side i likningen i b) er delelig med $x - 1$.

Polynomdivisjon

$$\begin{aligned}
&(x^3 - 3x + 2) : (x - 1) = \underline{x^2 + x - 2} \\
&\underline{-(x^3 - x^2)} \\
&\quad x^2 - 3x + 2 \\
&\quad \underline{-(x^2 - x)} \\
&\qquad -2x + 2 \\
&\qquad \underline{-(2x + 2)} \\
&\qquad\qquad 0
\end{aligned}$$

Vi bruker så abc - formelen til å finne de andre nullpunktene

$$x^2 + x - 2 = 0$$
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1}$$
$$x = \frac{-1 \pm 3}{2 \cdot 1}$$

$$x_1 = \underline{\underline{1}}$$
$$x_2 = \underline{\underline{-2}}$$

Vi ser at det ene nullpunktet faller sammen med tangeringspunktet.

Koordinatene til Q er $(-2, f(-2)) = \underline{\underline{(-2, -8)}}$

En annen tangent T_2 til grafen er parallell med tangenten T_1.

c) Finn tangeringspunktet R mellom grafen til f og T_2 ved regning.

Tangentene T_2 og T_1 må ha samme stigningstall. Da må den deriverte i R være lik 3.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 3 \\
3x^2 &= 3 \\
x_1 &= \underline{-1} \\
x_2 &= \underline{1}
\end{aligned}
$$

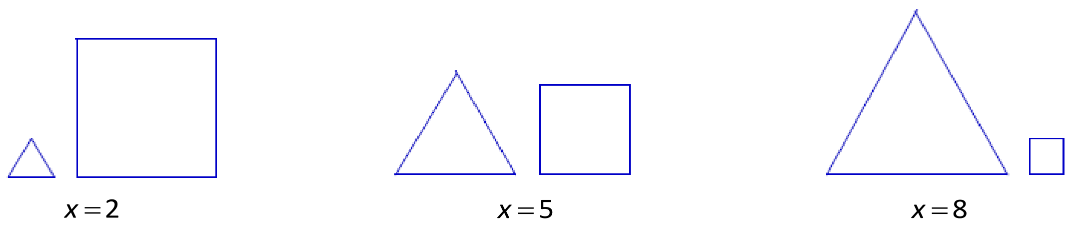
Koordinatene til R er da $\left(-1, f(-1)\right) = \underline{\underline{(-1,-1)}}$

Oppgave 5

Alternativ II

En ledning er 10 meter lang. Ledningen skal kuttes i to deler. Den ene delen skal formes til sidene i et kvadrat. Den andre delen skal formes til sidene i en likesidet trekant.

Den delen som brukes til å forme trekanten er x meter lang.



a) Forklar at arealet av kvadratet målt i kvadratmeter kan skrives som

$$F_1(x) = \frac{1}{16}(10-x)^2$$

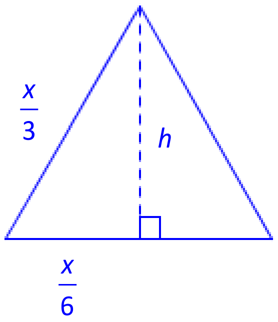
Den delen som brukes til å forme kvadratet er $10-x$. Da blir hver side i kvadratet $\frac{1}{4}(10-x)$ og arealet av kvadratet blir

$$F_1(x) = \left(\frac{1}{4}(10-x)\right)^2 = \frac{1}{16}(10-x)^2$$

b) Forklar at arealet av den likesidete trekanten målt i kvadratmeter kan skrives som

$$F_2(x) = \frac{\sqrt{3}}{36} \cdot x^2$$

Siden i den likesidete trekanten har lengden $\frac{x}{3}$.



$$\frac{x}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{x}{6}$$

Vi kan bruke Pytagoras´ setning for å finne høyden i den likesidede trekanten

$$h = \sqrt{\left(\frac{x}{3}\right)^2 - \left(\frac{x}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{4x^2 - x^2}{36}} = \underline{\frac{x\sqrt{3}}{6}}$$

Arealet blir da

$$F_2(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdot \frac{x\sqrt{3}}{6} = \underline{\frac{\sqrt{3}}{36} \cdot x^2}$$

c) Undersøk hvordan ledningen må kuttes for at summen

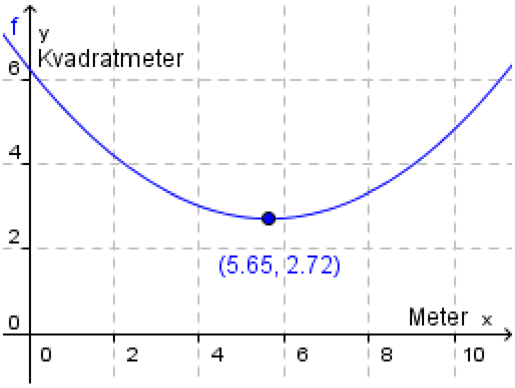
$$F(x) = F_1(x) + F_2(x)$$

skal få sin minste verdi.

Vi finner et uttrykk for $F(x)$

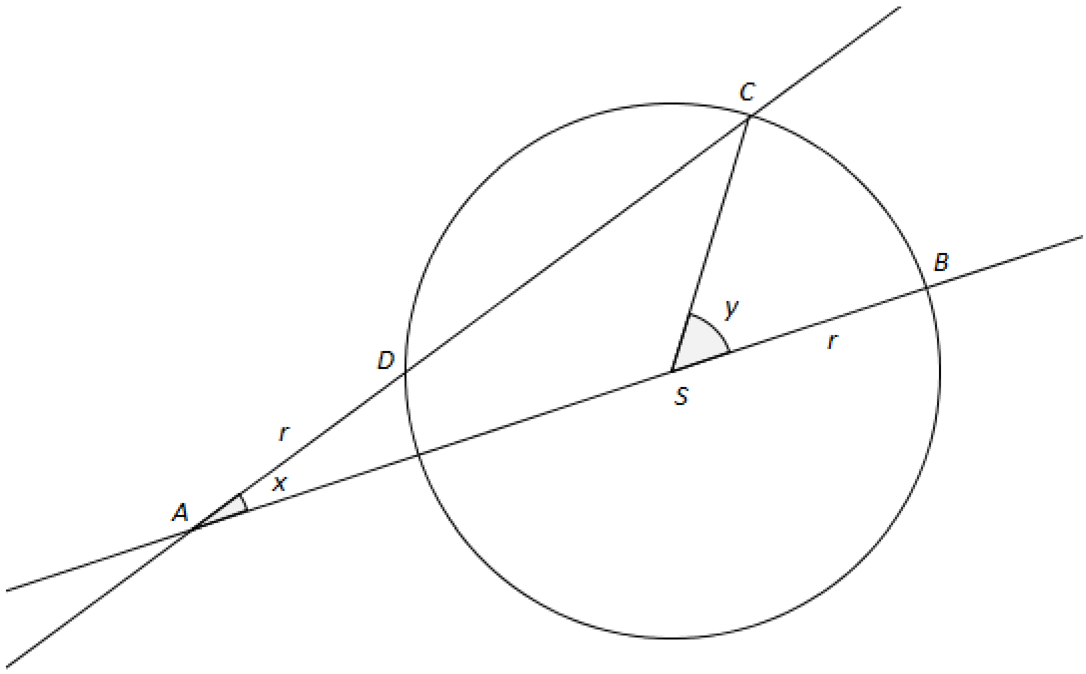
$$F(x) = F_1(x) + F_2(x) = \underline{\frac{1}{16}(10-x)^2 + \frac{\sqrt{3}}{36} \cdot x^2}$$

Vi tegner så grafen til $F(x)$ i GeoGebra og finner bunnpunktet ved å bruke kommandoen Ekstremalpunkt[f].



<u>Vi må bruke 5,7 meter til å forme trekanten for å få minst areal.</u>
(Se koordinatsystemet ovenfor.)

Oppgave 6



På figuren over setter vi $x = \angle SAD$ og $y = \angle BSC$. Du skal vise at det er en sammenheng mellom x og y når $AD = r$.

a) Forklar at $\angle ASD = x$.

$AD = SD = \underline{r}$

ΔASD er likebeint og $\angle ASD = \angle SAD = \underline{x}$

b) Vis at $\angle SDC = \angle SCD = 2x$.

Vinkelsummen i ΔASD er $180°$.

$\angle ADS = 180° - \angle SAD - \angle ASD = \underline{180° - 2x}$

Punktene A, D og C ligger på en rett linje.

$\angle SDC = 180° - \angle ADS = 180° - (180° - 2x) = \underline{2x}$

$DS = CS = \underline{r}$

ΔDSC er likebeint og $\angle SCD = \angle SDC = \underline{2x}$

c) Vis at $y = 3x$.

Vinkelsummen i ΔDSC er $180°$.

$\angle DSC = 180° - \angle SDC - \angle SCD = \underline{180° - 4x}$

Punktene A, S og B ligger på en rett linje.

$y = 180^\circ - \angle ASD - \angle DSC = 180^\circ - x - (180^\circ - 4x) = \underline{3x}$

$DS = CS = \underline{r}$

ΔDSC er likebeint og $\angle SCD = \angle SDC = \underline{2x}$

Oppgave 7

Vi vil undersøke om tallet $(4^n - 1)$ er delelig med 3 når n er et naturlig tall.

a) Kontroller at $(4^n - 1)$ er delelig med 3 når $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ og $n = 4$.

$(4^1 - 1) = \underline{3}$

$(4^2 - 1) = \underline{15}$

$(4^3 - 1) = \underline{63}$

$(4^4 - 1) = \underline{255}$

Tallene blir $3, 15, 63$ og 255 som alle er delelig på 3.

b) Vis at $(4^n - 1) = (2^n - 1)(2^n + 1)$.

Vi omformer den første potensen og bruker tredje kvadratsetning

$(4^n - 1) = \left((2^n)^2 - 1\right) = \underline{(2^n - 1)(2^n + 1)}$

c) Forklar at $(2^n - 1)$, 2^n og $(2^n + 1)$ er tre hele tall som ligger etter hverandre på tallinjen.

Det andre tallet er én større enn det første og det tredje er én større enn det andre. Altså er dette tre hele tall som ligger etter hverandre på tallinjen.

Forklar at ett av disse tallene er delelig med 3. Hvilket av tallene kan ikke være delelig med 3?

Siden hvert tredje hele tall på tallinjen er delelig med 3, må ett av disse tallene være delelig med 3.

Tallet 2^n kan ikke være delelig med 3.

d) Bruk b) og c) over til å bevise at $(4^n - 1)$ er delelig med 3 for alle naturlige tall n.

$(4^n - 1) = \left((2^2)^n - 1\right) = \left((2)^{2n} - 1\right) = \left((2^n)^2 - 1\right) = (2^n - 1)(2^n + 1)$

Da er både $\left(2^n - 1\right)$ og $\left(2^n + 1\right)$ faktorer i $\left(4^n - 1\right)$. Fra c) vet vi at én av disse faktorene er delelig med 3. Altså må $\left(4^n - 1\right)$ være delelig med 3.

Bildeliste

Tippekupong
Foto: Roger Hardy/Samfoto/Scanpix