Eksamen REA3022 R1, Våren 2010

Del 1

Tid: 2 timer
Hjelpemidler: Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler er tillatt.

Oppgave 1

a) Deriver funksjonene

1) $f(x) = x^3 \cdot \ln x$
2) $g(x) = 4e^{x^2 - 3x}$

b) Vi har polynomfunksjonen $P(x) = x^3 - 4x^2 - 4x + 16$

1) Regn ut $P(2)$. Bruk polynomdivisjon til å faktorisere uttrykket $P(x)$ i førstegradsfaktorer.

2) Løs ulikheten $P(x) \leq 0$

c) Nedenfor er gitt to utsagn. Skriv av utsagnene i besvarelsen. I boksen mellom utsagnene skal du sette inn ett av symbolene $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ eller $\Leftrightarrow$.

Per er fra Bergen $\boxed{}$ Per er fra Norge

Forklar hvordan du har tenkt.

d) Vi har vektoren $\vec{a} = [3,5]$.

1) En vektor $\vec{b}$ er dobbelt så lang som $\vec{a}$ og har motsatt retning av $\vec{a}$.
Skriv $\vec{b}$ på koordinatform.

2) Finn koordinatene til en vektor $\vec{c}$ som står normalt på $\vec{a}$.

e) Løs likningen $4\cdot\left(1+\dfrac{x}{100}\right)^4=64$

f) I en sirkel med radius r er det innskrevet en trekant ABC. Lengden til radien er gitt til høyre.

Siden AB i trekanten er $\dfrac{3}{2}r$, og $\angle ABC=45°$.

Konstruer trekanten. Forklar konstruksjonen.

Oppgave 2

Den deriverte til en polynomfunksjon f er gitt ved

$$f'(x)=2(x+1)(x-3)$$

a) Bruk uttrykket over til å finne ut hvor funksjonen vokser, og hvor den avtar. Bestem også førstekoordinatene til topp- og bunnpunktet på grafen til f.

b) Bestem $f''(x)$. Bruk $f''(x)$ til å finne førstekoordinaten til vendepunktet på grafen til f.

Den deriverte til en polynomfunksjon g er gitt ved

$$g'(x)=a\cdot(x-b)\cdot(x-c)$$

der konstantene a, b og c alle er positive. Vi antar at $b<c$. Førstekoordinatene til topp- og bunnpunktet på grafen til g er x_{maks} og x_{min}.

c) Forklar hvorfor grafen til g bare kan ha ett vendepunkt. Vis at førstekoordinaten til dette vendepunktet ligger midt mellom x_{maks} og x_{min}.

Del 2

Tid: 3 timer
Hjelpemidler: Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.

Oppgave 3

På en tippekupong er det 12 fotballkamper. Når man tipper en enkeltrekke, skal man tippe resultatet i hver av de 12 fotballkampene. Utfallet i en kamp er enten hjemmeseier (H), uavgjort(U) eller borteseier(B).

En ivrig tipper la merke til at det i en viss periode ofte var 5 hjemmeseire (H) blant de 12 kampene på tippekupongen.

a) Hvor mange ulike utvalg på 5 kamper kan velges ut blant 12 kamper?

b) Vi har fylt ut 5 kamper som vi tror ender med hjemmeseier. På hvor mange måter kan vi fylle ut de 7 resterende kampene når hver av dem skal fylles ut med enten uavgjort (U) eller borteseier (B)?

c) Hvor stor er sannsynligheten for at en tilfeldig utfylt tipperekke skal inneholde nøyaktig 5 hjemmeseire?

Oppgave 4

Posisjonsvektoren til en partikkel er gitt ved

$$\vec{r}(t) = \left[t^3 + 3,\ t + 1\right] \qquad \text{det vil si} \qquad \begin{cases} x = t^3 + 3 \\ y = t + 1 \end{cases}$$

a) Tegn grafen til $\vec{r}$ når $t \in [-2,\ 2]$.

b) Bestem fartsvektoren $\vec{v}(t)$ og akselerasjonsvektoren $\vec{a}(t)$. Marker $\vec{v}(1)$ og $\vec{a}(1)$ på kurven til $\vec{r}$.

c) Finn ved regning det punktet på kurven der $\vec{v}(t)$ er parallell med y-aksen.

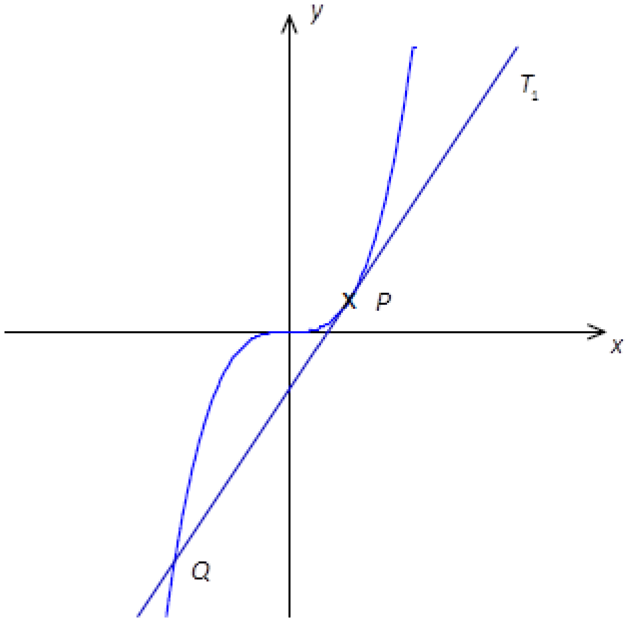
Oppgave 5

Du skal svare på enten alternativ I eller alternativ II.
De to alternativene teller like mye ved vurderingen.

(Dersom besvarelsen din inneholder deler av begge alternativene,
vil bare det du har skrevet på alternativ I, bli vurdert.)

Alternativ I

På figuren ser du en skisse av grafen til funksjonen $f(x) = x^3$ og tangenten T_1 til grafen i punktet $P(1,1)$. På skissen har grafene ulik målestokk.



a) Vis ved regning at likningen til tangenten T_1 er
$y = 3x - 2$

Punktet Q på figuren er et annet fellespunkt mellom grafen til f og T_1.

b) Forklar at førstekoordinaten til Q må være en løsning av likningen
$x^3 - 3x + 2 = 0$

Bruk polynomdivisjon og løs denne likningen ved regning. Finn koordinatene til Q.

En annen tangent T_2 til grafen er parallell med tangenten T_1.

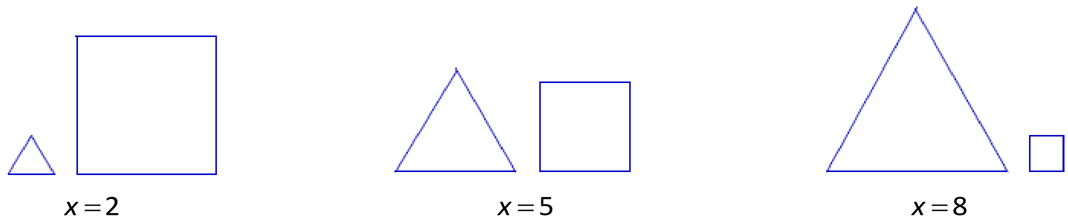
c) Finn tangeringspunktet R mellom grafen til f og T_2 ved regning.

Oppgave 5

Alternativ II

En ledning er 10 meter lang. Ledningen skal kuttes i to deler. Den ene delen skal formes til sidene i et kvadrat. Den andre delen skal formes til sidene i en likesidet trekant.

Den delen som brukes til å forme trekanten er x meter lang.



a) Forklar at arealet av kvadratet målt i kvadratmeter kan skrives som

$$F_1(x)=\frac{1}{16}(10-x)^2$$

b) Forklar at arealet av den likesidete trekanten målt i kvadratmeter kan skrives som

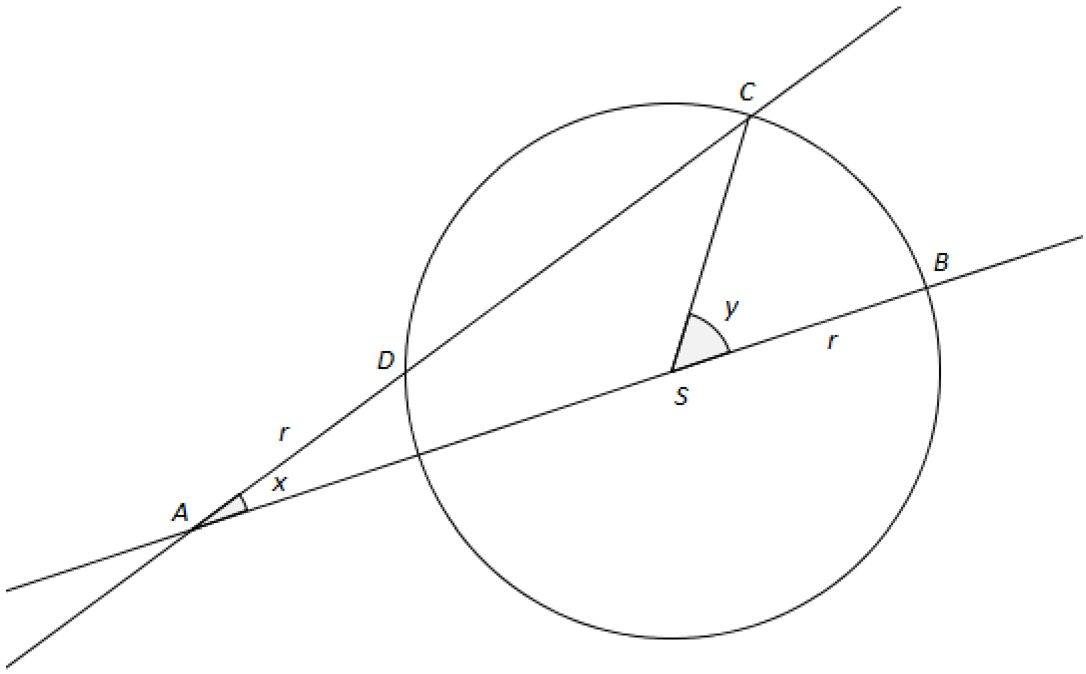
$$F_2(x)=\frac{\sqrt{3}}{36}\cdot x^2$$

c) Undersøk hvordan ledningen må kuttes for at summen

$$F(x)=F_1(x)+F_2(x)$$

skal få sin minste verdi.

Oppgave 6



På figuren over setter vi $x = \angle SAD$ og $y = \angle BSC$. Du skal vise at det er en sammenheng mellom x og y når $AD = r$.

a) Forklar at $\angle ASD = x$.

b) Vis at $\angle SDC = \angle SCD = 2x$.

c) Vis at $y = 3x$.

Oppgave 7

Vi vil undersøke om tallet $\left(4^n - 1\right)$ er delelig med 3 når n er et naturlig tall.

a) Kontroller at $\left(4^n - 1\right)$ er delelig med 3 når $n=1$, $n=2$, $n=3$ og $n=4$.

b) Vis at $\left(4^n - 1\right) = \left(2^n - 1\right)\left(2^n + 1\right)$.

c) Forklar at $\left(2^n - 1\right)$, 2^n og $\left(2^n + 1\right)$ er tre hele tall som ligger etter hverandre på tallinjen.

Forklar at ett av disse tallene er delelig med 3. Hvilket av tallene kan ikke være delelig med 3?

d) Bruk b) og c) over til å bevise at $\left(4^n - 1\right)$ er delelig med 3 for alle naturlige tall n.

Bildeliste

Tippekupong

Foto: Roger Hardy/Samfoto/Scanpix