DEL 1
Uten hjelpemidler

Tid: 3 timer
Hjelpemidler: Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler er tillatt.

Oppgave 1 (3 poeng)

Deriver funksjonene

a) $f(x) = 2\cos 5x$

b) $g\left(x\right) = e^{-2x} \cdot \sin x$

Oppgave 2 (4 poeng)

Bestem integralene

a) $\int_{1}^{e} \frac{3}{x}\,\mathrm{dx}$

b) $\int \frac{2}{x^2 - 1}\,\mathrm{dx}$

Oppgave 3 (6 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f\left(x\right) = \sin x \quad , \qquad x \in \left[0,\, \pi\right]$$

Et flatestykke er avgrenset av *x*-aksen og grafen til f.

a) Regn ut arealet av flatestykket.

b) Vis ved derivasjon at $\int \sin^2 x\ \mathrm{dx} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x \cdot \cos x + C$

Vi roterer flatestykket $360°$ om *x*-aksen.
c) Regn ut volumet av det omdreiningslegemet vi da får.

Oppgave 4 (5 poeng)

Rekken $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{2^n}$ er gitt.

a) Forklar at dette er en geometrisk rekke. Bestem et uttrykk for summen S_n av de n første leddene i rekken.

Vi har gitt produktet $P_n(x)=\sqrt{x}\cdot\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt[8]{x}\cdot\sqrt[16]{x}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2^n]{x}$, $x>0$

b) Vis at $P_n(x)=x^{\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}$

c) Bestem $\lim\limits_{n\to\infty}P_n(x)$.

Oppgave 5 (6 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x)=3\cos 2x \quad , \qquad x\in\langle 0,\, 2\pi\rangle$$

a) Bestem eventuelle nullpunkter til f.

b) Bestem eventuelle topp- eller bunnpunkter på grafen til f.

c) Lag en skisse av grafen til f.

Oppgave 6 (3 poeng)

Løs differensiallikningen

$$y'-x\cdot y=x\ , \quad \text{der } y(0)=1$$

Oppgave 7 (7 poeng)

Punktene $A(1, -4, 1)$ og $B(3, 0, 5)$ ligger i planet α.
Vektoren $\vec{n}_\alpha = [k, 1, -k]$ står normalt på α for en bestemt verdi av konstanten k.

a) Vis at planet α er gitt ved $2x + y - 2z + 4 = 0$.

Planet α skjærer z-aksen i punktet C.

b) Bestem koordinatene til C.

c) Bestem volumet av pyramiden *ABCO*, der O er origo.

En kule har sentrum i origo og tangerer planet α i et punkt P.

d) Bestem koordinatene til punktet P.

Oppgave 8 (2 poeng)

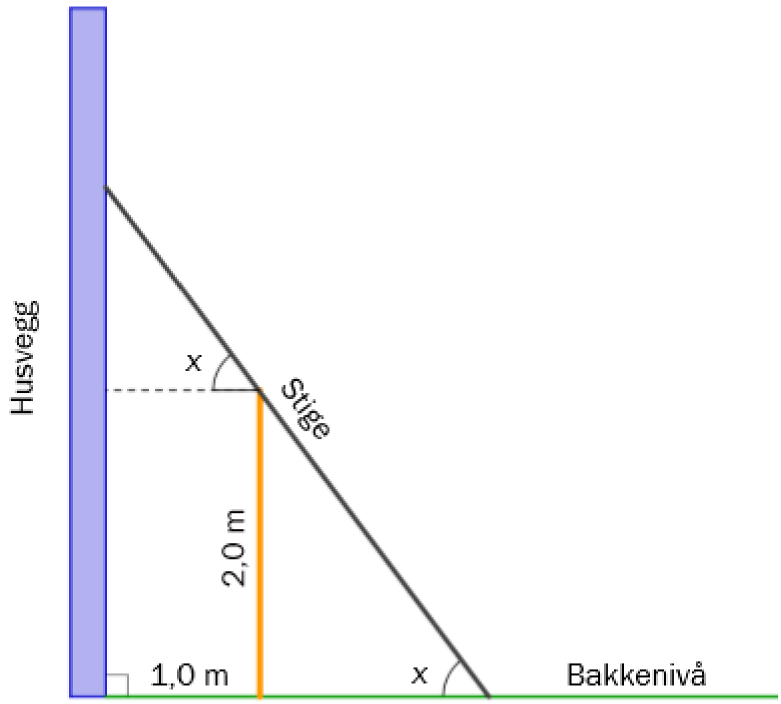
Bruk induksjon til å bevise påstanden P gitt ved

$$P(n):\ \frac{k^n - 1}{k - 1} = 1 + k + k^2 + k^3 + \cdots + k^{n-1} \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

DEL 2
Med hjelpemiddel

Oppgave 1 (6 poeng)

En stige, som kan justeres, skal stå på skrå mot en husvegg og berøre et 2,0 m høyt gjerde. Gjerdet står 1,0 m fra husveggen. La x være vinkelen mellom stigen og bakken. Se skissen nedenfor.



a) Vis at lengden av stigen, målt i meter, er

$$L(x) = \frac{1}{\cos x} + \frac{2}{\sin x} \quad , \quad \text{der } 0° < x < 90°$$

b) Bestem x slik at lengden av stigen blir kortest mulig.
Hvor høyt opp på veggen rekker stigen da?

Oppgave 2 (8 poeng)

Daglengden D i Bergen er tilnærmet gitt ved funksjonen

$$D(t) = 6{,}63\sin(0{,}0172t - 1{,}39) + 12{,}5$$

Her er $D(t)$ daglengden målt i timer, og t er antall dager fra nyttår.

a) Bruk uttrykket $D(t)$ til å bestemme den korteste og den lengste daglengden i Bergen.

b) Bruk graftegner til å tegne grafen til D for $t \in [0,\ 365]$.

c) Når er daglengden i Bergen 14 timer?.

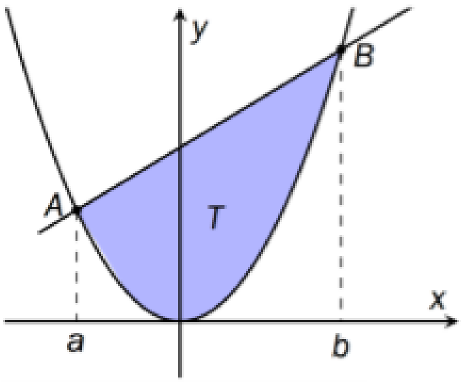
d) Undersøk på hvilken dato daglengden vokser raskest.
Hvor mye øker daglengden per døgn da?

Oppgave 3 (6 poeng)

En funksjon f er gitt ved

$$f(x) = x^2$$

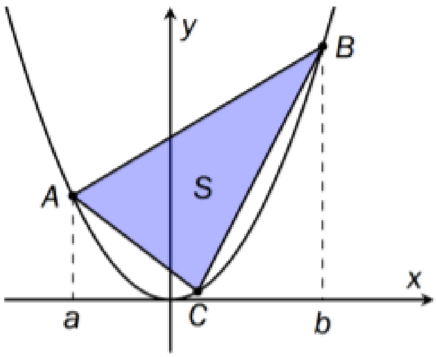
Punktene $A(a, a^2)$ og $B(b, b^2)$ der $a < b$, ligger på grafen til f. Se figur 1 nedenfor.



Figur 1

a) Grafen til f og linjestykket AB avgrenser et flatestykke med areal T.
   Bruk CAS til å bestemme T uttrykt ved a og b.

Punktet C på grafen har koordinatene (c, c^2), der $c = \dfrac{a+b}{2}$. Se figur 2 nedenfor.



Figur 2

b) Bruk CAS til å vise at arealet S av $\triangle ABC$ er $S = \dfrac{1}{8}(b-a)^3$.

c) Bestem forholdet $\dfrac{T}{S}$.

Oppgave 4 (4 poeng)

I en bygd med 1200 innbyggere spres et rykte. La y være antall innbyggere som kjenner til ryktet ved tiden t, der t er tiden målt i dager etter at ryktet oppsto.

Vi antar at ryktet spres med en fart som til enhver tid er proporsjonal med produktet av antall innbyggere som kjenner ryktet, og antall innbyggere som ikke kjenner det. Proporsjonalitetskonstanten har verdien $0{,}0006$.

Ved tiden $t=0$ var det kun én person som kjente til ryktet.

a) Sett opp en differensiallikning som beskriver situasjonen over.

b) Hvor lang tid tar det før halve bygda kjenner til ryktet?