DEL 1
Uten hjelpemidler

Tid: 3 timer
Hjelpemidler: Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler er tillatt.

Oppgave 1 (3 poeng)

Deriver funksjonene

a) $f(x) = 2\cos 5x$

$f'(x) = 2\cdot(-5\sin 5x) = \underline{\underline{-10\sin 5x}}$

b) $g(x) = e^{-2x}\cdot \sin x$

Vi bruker produktregelen for derivasjon, $u'\cdot v + u\cdot v'$.

Vi bruker kjerneregelen på e^{-2x} og setter $h(u) = e^u$ og $u = -2x$

Vi får da $h'(u)\cdot u' = e^u\cdot(-2) = -2e^{-2x}$

$g'(x) = -2e^{-2x}\cdot \sin x + e^{-2x}\cdot \cos x = \underline{\underline{e^{-2x}(\cos x - 2\sin x)}}$

Oppgave 2 (4 poeng)

Bestem integralene

a) $\int_1^e \frac{3}{x}\,dx = \left[3\ln|x|\right]_1^e = 3\ln e - 3\ln 1 = 3\cdot 1 - 3\cdot 0 = \underline{\underline{3}}$

b) $\int \frac{2}{x^2-1}\,dx$

Vi bruker delbrøkoppspalting.

Vi faktorisere nevneren til $(x-1)(x+1)$ og kan skrive

$$\int \frac{2}{x^2-1}dx = \int\left(\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}\right)dx$$
$$\int \frac{2}{x^2-1}dx = A\int \frac{1}{x-1}dx + B\int\frac{1}{x+1}dx$$

Vi finner koeffisientene A og B

$$\frac{2}{x^2-1} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$$
$$\frac{2}{x^2-1} = \frac{A(x+1)}{(x-1)(x+1)}+\frac{B(x-1)}{(x+1)(x-1)}$$
$$\frac{2}{x^2-1} = \frac{Ax+A+Bx-B}{(x-1)(x+1)}$$
$$\frac{2}{x^2-1} = \frac{(A+B)x+(A-B)}{(x-1)(x+1)}$$

$$\begin{aligned}
A+B&=0 & \wedge && A-B&=2\\
B&=-A & \wedge && A&=B+2\\
B&=-(B+2) & \wedge && A&=B+2\\
2B&=-2 & \wedge && A&=B+2\\
B&=-1 & \wedge && A&=1
\end{aligned}$$

Vi setter A og B inn i det opprinnelige integralet og får

$$\begin{aligned}
\int \frac{2}{x^2-1}dx &= A\int \frac{1}{x-1}dx + B\int\frac{1}{x+1}dx\\
&= 1\int \frac{1}{x-1}dx - 1\int\frac{1}{x+1}dx\\
&= \underline{\underline{\ln|x-1| - \ln|x+1| + C}}
\end{aligned}$$

Oppgave 3 (6 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = \sin x \quad , \quad x \in [0, \pi]$$

Et flatestykke er avgrenset av *x*-aksen og grafen til f.

a) Regn ut arealet av flatestykket.

Vi vet at $\sin x \geq 0$ når $x \in [0, \pi]$. Vi regner ut som bestemt integral.

Arealet av flatestykket blir

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\pi} = -\cos\pi - (-\cos 0) = -(-1) + 1 = \underline{\underline{2}}$$

b) Vis ved derivasjon at $\int \sin^2 x \; dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x \cdot \cos x + C$

Vi deriverer høyresiden i uttrykket ovenfor ved å bruke blant annet produktregelen for derivasjon. Videre anvender vi at $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x \cdot \cos x + C\right)' &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot (-\sin x)) + 0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\cos^2 x - \sin^2 x) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1 - \sin^2 x + \sin^2 x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1 - 2\sin^2 x) = \sin^2 x\end{aligned}$$

Vi dermed vist at $\int \sin^2 x \; dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x \cdot \cos x + C$

Vi roterer flatestykket $360°$ om *x*-aksen.

c) Regn ut volumet av det omdreiningslegemet vi da får.

Volum for omdreiningslegeme er gitt ved formelen $V = \pi \cdot \int (f(x))^2 \; dx$.

Vi bruker opplysningen fra oppgave b), $\int \sin^2 x \; dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x \cdot \cos x + C$ og finner

$$\begin{aligned}V &= \pi \cdot \int_0^{\pi} \sin^2 x \; dx = \pi \cdot \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x \cdot \cos x\right]_0^{\pi} \\ &= \pi \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\sin\pi \cdot \cos\pi\right) - \left(\frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{1}{2}\sin 0 \cdot \cos 0\right)\right) \\ &= \pi \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot (-1)\right) - \left(0 - \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 1\right) \\ &= \underline{\underline{\frac{\pi^2}{2}}}\end{aligned}$$

Oppgave 4 (5 poeng)

Rekken $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{2^n}$ er gitt.

a) Forklar at dette er en geometrisk rekke. Bestem et uttrykk for summen S_n av de n første leddene i rekken.

Vi ser at $k=\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{1}{2}$. Rekken er dermed geometrisk.

$$S_n=a_1\cdot\frac{k^n-1}{k-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n-1}{\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}}\cdot\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n-1\right)=-\left(\frac{1^n}{2^n}-1\right)=\underline{\underline{1-\frac{1}{2^n}}}$$

Vi har gitt produktet $P_n(x)=\sqrt{x}\cdot\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt[8]{x}\cdot\sqrt[16]{x}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2^n]{x}$, $x>0$

b) Vis at $P_n(x)=x^{\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}$

$$P_n(x)=\sqrt{x}\cdot\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt[8]{x}\cdot\sqrt[16]{x}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2^n]{x}=x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{4}}\cdot x^{\frac{1}{8}}\cdot x^{\frac{1}{16}}\cdot\ldots\cdot x^{\frac{1}{2n}}=x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{2^n}}=\underline{\underline{x^{1-\frac{1}{2^n}}}}$$

c) Bestem $\lim\limits_{n\to\infty}P_n(x)$.

$$\lim_{n\to\infty}P_n(x)=\lim_{n\to\infty}x^{1-\frac{1}{2^n}}=x^{1-0}=\underline{\underline{x}}$$

Oppgave 5 (6 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x)=3\cos 2x\quad,\qquad x\in\langle 0,\,2\pi\rangle$$

a) Bestem eventuelle nullpunkter til f.

$$f(x)=0\qquad\qquad x\in\langle 0,\,2\pi\rangle$$

$$3\cos 2x=0$$

$$\cos 2x=0$$

$$2x=\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi$$

$$x=\frac{\pi}{4}+k\cdot\frac{\pi}{2}$$

I vårt definisjonsområde får vi løsninger av $f(x)=0$ for $k=0$, $k=1$, $k=2$ og $k=3$

$$\underline{\underline{L=\left\{\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right\}}}$$

b) Bestem eventuelle topp- eller bunnpunkter på grafen til f.

Fra enhetssirkelen vet vi at $\cos x$ vil ha sin største verdi 1 ved $x = 0 + k \cdot 2\pi$
Vi finner dermed x-verdiene til eventuelle toppunkter ved å løse likningen

$$\cos(2x) = 1$$
$$2x = 0 + k \cdot 2\pi$$
$$x = k \cdot \pi$$

I vårt intervall har vi dermed et toppunkt i $(\pi, f(\pi)) = \underline{\underline{(\pi, 3)}}$

Fra enhetssirkelen vet vi at $\cos x$ vil ha sin minste verdi -1 ved $x = \pi + k \cdot 2\pi$

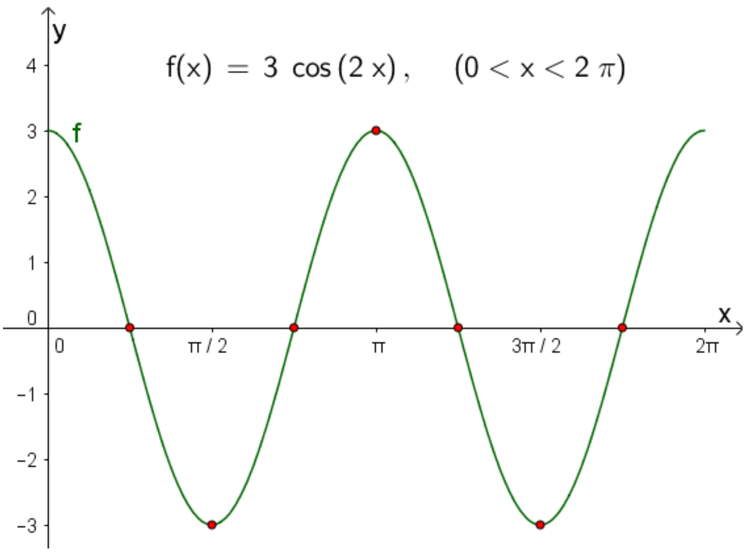
For å finne x-verdiene til eventuelle bunnpunkter løse vi likningen

$$\cos(2x) = -1$$
$$2x = \pi + k \cdot 2\pi$$
$$x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$$

I vårt intervall har vi dermed bunnpunkter i

$\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \underline{\underline{\left(\frac{\pi}{2}, -3\right)}}$ og i $\left(\frac{3\pi}{2}, f\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = \underline{\underline{\left(\frac{3\pi}{2}, -3\right)}}$

c) Lag en skisse av grafen til f.



Denne grafen er laget i GeoGebra. En skisse har ikke samme krav til nøyaktighet som en graf, men det er svært viktig at punktene vi fant i a) og b) markeres og at skissen følger opplysningen som er gitt i oppgaven. I tillegg må grafen være glatt, dvs. ingen spisse hjørner. Den må også tegnes innen sitt definisjonsområde.

Oppgave 6 (3 poeng)

Løs differensiallikningen

$$y' - x \cdot y = x \;, \quad \text{der } y(0) = 1$$

Likningen ovenfor kan skrives som en lineær, førsteordens differensiallikning på formen $y' + p(x) \cdot y = q(x)$.
Vi velger å bruke metoden med integrerende faktor for å løse likningen.

Den integrerende faktor er gitt ved $e^{\int p(x)}$. I dette tilfellet blir integrerende faktor $e^{-\frac{x^2}{2}}$

$$\begin{aligned}
y' - x \cdot y &= x \qquad\qquad | \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \\
e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot y' - e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot 2y &= x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \\
\left(e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot y \right)' &= x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \\
e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot y &= \int x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \,\mathrm{dx} \qquad\qquad \text{her har vi integrert ved hjelp} \\
e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot y &= -e^{-\frac{x^2}{2}} + C \qquad | \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \qquad \text{av variabelskifte, se nedenfor} \\
y &= \underline{C \cdot e^{\frac{x^2}{2}} - 1}
\end{aligned}$$

Integrasjon ved variabelskifte

Vi har $\int x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \,\mathrm{dx}$, setter $u = -\frac{x^2}{2} \Rightarrow \frac{du}{dx} = -x \Rightarrow dx = -\frac{du}{x}$ og får

$$\int x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \,\mathrm{dx} = \int x \cdot e^u \cdot \left(-\frac{\mathrm{du}}{x} \right) = \int -e^u \,\mathrm{du} = -\int e^u \,\mathrm{du} = -e^u + C = -e^{-\frac{x^2}{2}} + C$$

Gitt $y(0) = 1$

$$\begin{aligned}
1 &= C \cdot e^{-\frac{0^2}{2}} - 1 \\
1 &= C \cdot 1 - 1 \\
C &= \underline{2}
\end{aligned}$$

Dermed er $\quad y = \underline{\underline{2e^{\frac{x^2}{2}} - 1}}$

Oppgave 7 (7 poeng)

Punktene $A(1, -4, 1)$ og $B(3, 0, 5)$ ligger i planet α.

Vektoren $\vec{n}_\alpha = [k, 1, -k]$ står normalt på α for en bestemt verdi av konstanten k.

a) Vis at planet α er gitt ved $2x + y - 2z + 4 = 0$.

Vi finner først $\overrightarrow{AB} = [3-1, 0-(-4), 5-1] = [2, 4, 4]$

Denne vektoren ligger i planet α og vi kan sette

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}_\alpha &= 0 \\ [2, 4, 4] \cdot [k, 1, -k] &= 0 \\ 2k + 4 - 4k &= 0 \\ k &= 2 \end{aligned}$$

Vi har dermed $\overrightarrow{n_\alpha} = [2, 1, -2]$

Vi har at likningen for et plan er gitt ved

$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$

der (x_1, y_1, z_1) er et punkt i planet og $[a, b, c]$ er normalvektoren til planet.

Vi bruker punktet B og likningen for α blir

$$\begin{aligned} 2(x-3) + 1(y-0) - 2(z-5) &= 0 \\ 2x + y - 2z + 4 &= 0 \end{aligned}$$

Planet α skjærer z-aksen i punktet C.

b) Bestem koordinatene til C.

Punktet C vil ha x- og y-koordinat lik 0. Vi bruker likningen vi fant i b) og finner koordinatene til punktet C.

$$\begin{aligned} 2 \cdot 0 + 0 - 2z + 4 &= 0 \\ z &= 2 \qquad \text{Punktet } C = (0, 0, 2) \end{aligned}$$

c) Bestem volumet av pyramiden $ABCO$, der O er origo.

Vi har fire punkter. Det betyr at pyramiden er et tetraeder der volumet, V, kan finnes ved $V = \dfrac{\left|\left(\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC}\right) \cdot \overrightarrow{OA}\right|}{6}$. Vi har valgt å bruke vektorer som gir enklest regning.

$\overrightarrow{OA} = [1, -4, 1] \qquad \overrightarrow{OB} = [3, 0, 5] \qquad \overrightarrow{OC} = [0, 0, 2]$

$$\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = [(0 \cdot 2 - 5 \cdot 0), -(3 \cdot 2 - 5 \cdot 0) + (3 \cdot 0 - 0 \cdot 0)] = [0, -6, 0]$$

$$V = \frac{\left|\left(\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC}\right) \cdot \overrightarrow{OA}\right|}{6} = \frac{|[0, 6, 0] \cdot [1, -4, 1]|}{6} = \frac{|0 \cdot 1 + 6 \cdot (-4) + 0 \cdot 1|}{6} = \frac{24}{6} = \underline{\underline{4}}$$

En kule har sentrum i origo og tangerer planet α i et punkt P.

d) Bestem koordinatene til punktet P.

Vi har at radien gitt ved $\overrightarrow{OP}$ vil stå vinkelrett på planet α. Det betyr at $\overrightarrow{OP}$ må være parallell med $\overrightarrow{n_\alpha}$.

Det gir videre at $\overrightarrow{OP} = t \cdot \overrightarrow{n_\alpha} = t \cdot [2, 1, -2] = [2t, t, -2t]$.

Tangeringspunktet P har dermed koordinatene $P(2t, t, -2t)$. Fra oppgave a) har vi at likningen for planet α er gitt ved $2x + y - 2z + 4 = 0$.

Tangeringspunktet P mellom planet α og kula må passe i likningen for dette planet. Vi setter koordinatene til P inn i likningen og får

$$\begin{aligned} 2\cdot(2t) + t - 2\cdot(-2t) + 4 &= 0 \\ 4t + t + 4t &= -4 \\ t &= -\frac{4}{9} \end{aligned}$$

Tangeringspunktet er dermed $P\left(2\left(-\frac{4}{9}\right), \left(-\frac{4}{9}\right), -2\left(-\frac{4}{9}\right)\right) = \underline{\underline{\left(-\frac{8}{9}, -\frac{4}{9}, \frac{8}{9}\right)}}$

Oppgave 8 (2 poeng)

Bruk induksjon til å bevise påstanden P gitt ved

$$P(n):\ \frac{k^n-1}{k-1}=1+k+k^2+k^3+\cdots+k^{n-1}\quad,\qquad n\in\mathbb{N}$$

Trinn 1, Induksjonsgrunnlaget

Vi skal vise at formelen gjelder for $n=1$.

Bevis

Venstre side: $\frac{k^1-1}{k-1}=\frac{k-1}{k-1}=1$ Høyre side: 1

Formelen gjelder for $n=1$

Trinn 2, Induksjonstrinnet

Vi antar at formelen gjelder for $n=t$.

Det betyr at $P(t)=\frac{k^t-1}{k-1}=1+k+k^2+k^3+\cdots+k^{t-1}$

Vi må vise at formelen gjelder for $n=t+1$.

Vi må altså vise at

$$P(t+1)=\frac{k^{t+1}-1}{k-1}=1+k+k^2+k^3+\ldots+k^{t-1}+k^{(t+1)-1}$$

Bevis. Vi viser at høyre side i likningen ovenfor blir lik venstre side av likningen.

Høyre side:

$$1+k+k^2+k^3+\cdots+k^{t-1}+k^{(t+1)-1}=1+k+k^2+k^3+\cdots+k^{t-1}+k^t$$
$$=\frac{k^t-1}{k-1}+k^t=\frac{k^t-1}{k-1}+\frac{k^t(k-1)}{k-1}=\frac{k^t-1+k^{t+1}-k^t}{k-1}=\frac{k^{t+1}-1}{k-1}$$

Venstre side:

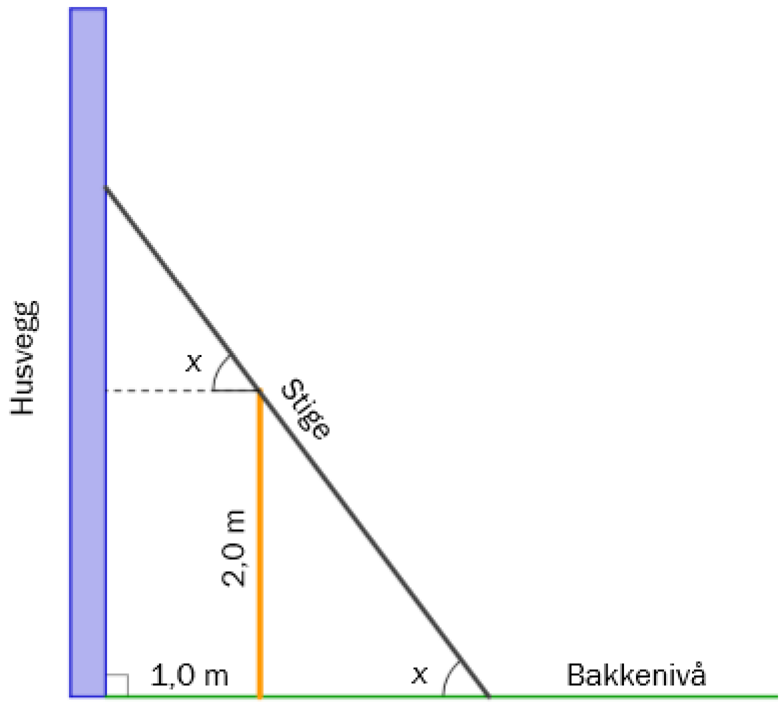
$$\frac{k^{t+1}-1}{k-1}$$

Vi ser at høyre side er lik venstre side. Vi har dermed vist at formelen gjelder for $n=t+1$

I følge induksjonsprinsippet gjelder formelen da for alle verdier av $n\in\mathbb{N}$.

DEL 2
Med hjelpemiddel

Oppgave 1 (6 poeng)
En stige, som kan justeres, skal stå på skrå mot en husvegg og berøre et 2,0 m høyt gjerde. Gjerdet står 1,0 m fra husveggen. La x være vinkelen mellom stigen og bakken. Se skissen nedenfor.



a) Vis at lengden av stigen, målt i meter, er

$$L(x)=\frac{1}{\cos x}+\frac{2}{\sin x} \quad , \quad \text{der } 0°<x<90°$$

Vi lar $L_1(x)$ være lengden av stigen som går fra bakkenivå opp til punktet der stigen berører gjerdet og $L_2(x)$ være lengden av resten av stigen.

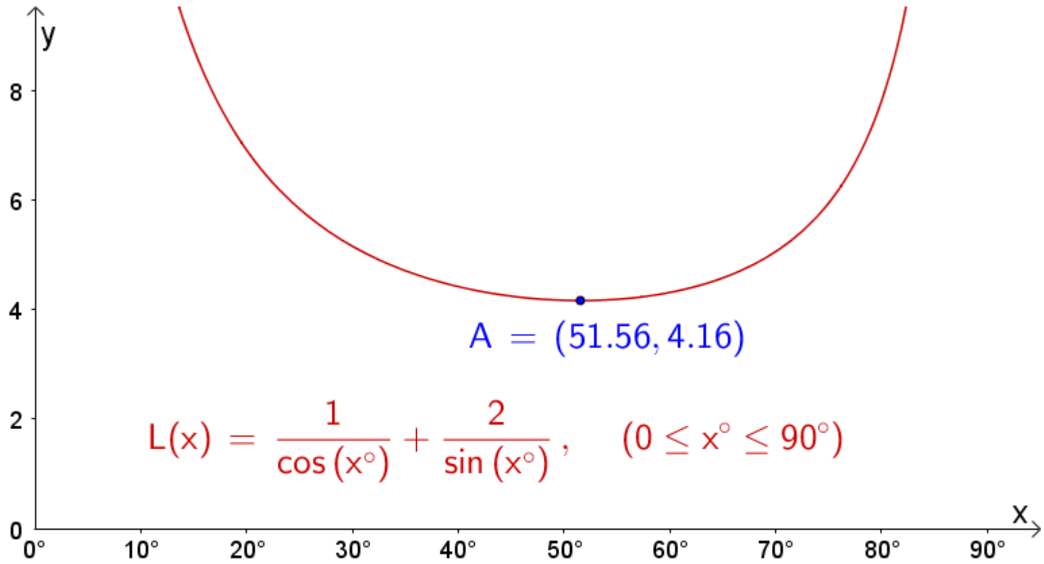
Lengden L_1 av stigen finner vi ved $\sin x=\dfrac{2}{L_1(x)}$ som gir $L_1(x)=\dfrac{2}{\sin x}$

Lengden L_2 av stigen finner vi ved $\cos x=\dfrac{1}{L_2(x)}$ som gir $L_2(x)=\dfrac{1}{\cos x}$

Lengde av hele stigen blir da $L(x)=L_1(x)+L_2(x)=\dfrac{1}{\cos x}+\dfrac{2}{\sin x}$, der $0<x<90°$

b) Bestem x slik at lengden av stigen blir kortest mulig.
Hvor høyt opp på veggen rekker stigen da?

Vi tegner grafen til L og finner bunnpunktet på grafen med kommandoen «Ekstremalpunkt$\left[L, 10, 80\right]$». Legg merke til at vi har brukt grader i funksjonsuttrykket.



Bunnpunktet viser at den minste lengden stigen kan ha er 4,16 m. Det skjer når vinkel $x = 51{,}56^\circ$.

Høyden h stigen når opp på veggen er gitt ved

$$\sin\left(51{,}56^\circ\right) = \frac{h}{4{,}16\ \text{m}} \quad \text{som gir} \quad h = \underline{\underline{3{,}26\ \text{m}}}$$

Oppgave 2 (8 poeng)

Daglengden D i Bergen er tilnærmet gitt ved funksjonen

$$D(t) = 6{,}63\sin(0{,}0172t - 1{,}39) + 12{,}5$$

Her er $D(t)$ daglengden målt i timer, og t er antall dager fra nyttår.

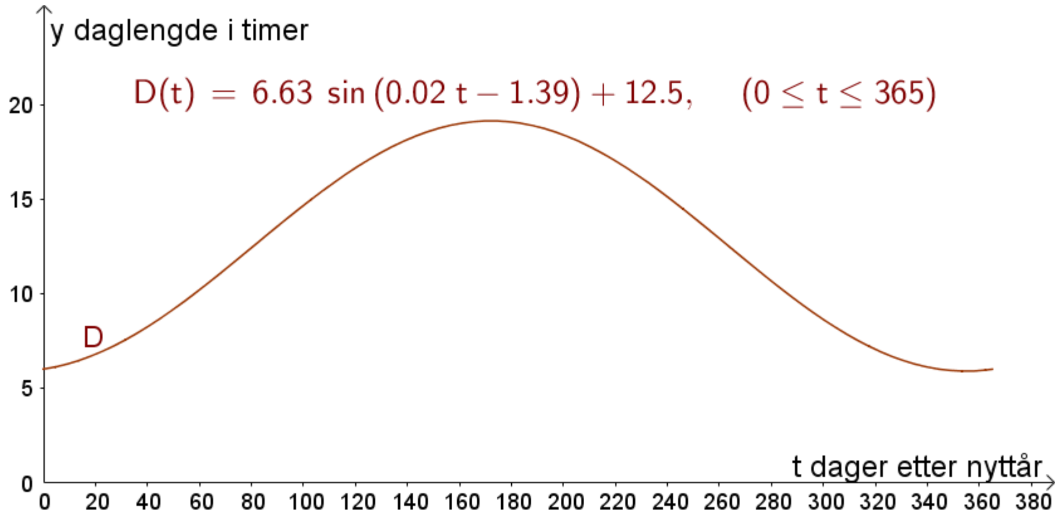
a) Bruk uttrykket $D(t)$ til å bestemme den korteste og den lengste daglengden i Bergen.

Vi vet at den største verdien til sinus er 1 og den minste verdien er -1.

Den lengste daglengden blir dermed $6{,}63 \cdot 1 + 12{,}5 = 19{,}13$ dvs. 19,13 timer.
Vi gjør om 0,13 timer til minutter og får $0{,}13 \cdot 60\,\text{min} = 7{,}8$ min
Den lengste daglengde i Bergen er 19 timer og 8 minutter.

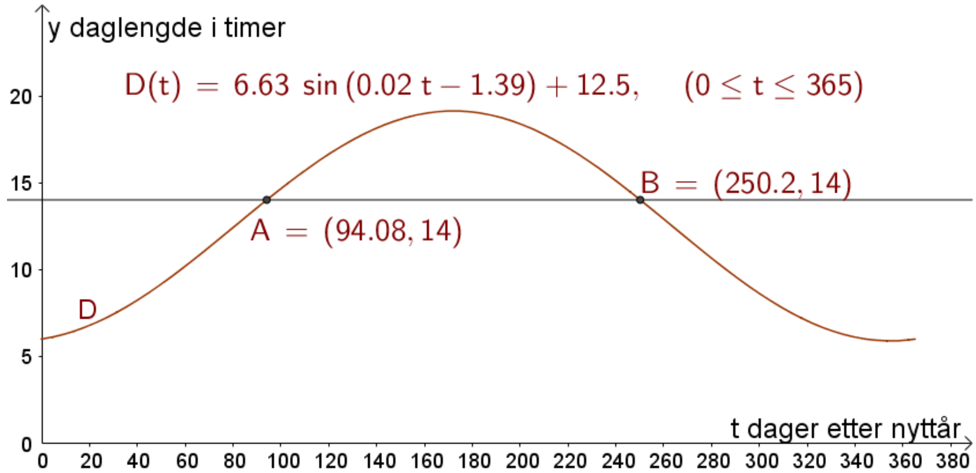
Den korteste daglengden blir $6{,}63 \cdot (-1) + 12{,}5 = 5{,}87$ dvs. 5,87 timer.
Vi gjør om 0,87 timer til minutter og får $0{,}87 \cdot 60\,\text{min} = 52{,}2$ min
Den korteste daglengde i Bergen er 5 timer og 52 minutter.

b) Bruk graftegner til å tegne grafen til D for $t \in [0,\ 365]$.



c) Når er daglengden i Bergen 14 timer?

Vi legger inn linjen $y = 14$ og bruker kommandoen «Skjæring mellom to objekt» for å finne skjæringspunktene mellom denne linjen og grafen til D.



Vi leser av at daglengden er 14 timer 94 dager etter nyttår og 250 dager etter nyttår.

d) Undersøk på hvilken dato daglengden vokser raskest.
Hvor mye øker daglengden per døgn da?

Vi finner infleksjonsverdiene til vendepunktene ved å løse likningen $D''(t) = 0$.

CAS

1	D(t):=6.63sin(0.0172t-1.39)+12.5 $\to\ D(t) := \frac{663}{100} \sin\left(\frac{43}{2500}\,t - \frac{139}{100}\right) + \frac{25}{2}$
2	NLøs[D''(t)=0, t] $\to\ \{t = 80.81, t = 263.46\}$
3	D'(80.81) $\approx\ 0.11$
4	D'(263.46) $\approx\ -0.11$

5	0.1140359997363*60 $\approx\ 6.84$
6	(6.842159984178-6)*60 $\approx\ 50.53$

Vendepunktene viser hvor daglengden øker eller avtar mest. Fra grafen vi tegnet i deloppgave b) ser vi at daglengden øker raskest 81 dager etter nyttår. I linje 3 ovenfor har vi også vist at stigningstallet er positivt for denne verdien.

Ser vi bort fra skuddår vi dette være 22. mars, (januar 31 dager, februar 28 dager og mars 22 dager).

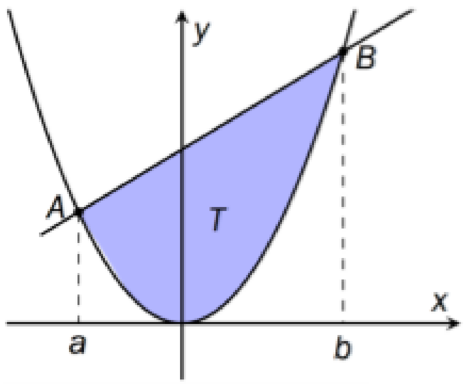
I linje 3 ovenfor ser vi at daglengden øker med 0,11 timer den 22. mars. I linje 5 og 6 har vi regnet om til minutter og sekunder og finner at daglengden øker med 6 minutt og 51 sekund den 22. mars i Bergen.

Oppgave 3 (6 poeng)

En funksjon f er gitt ved

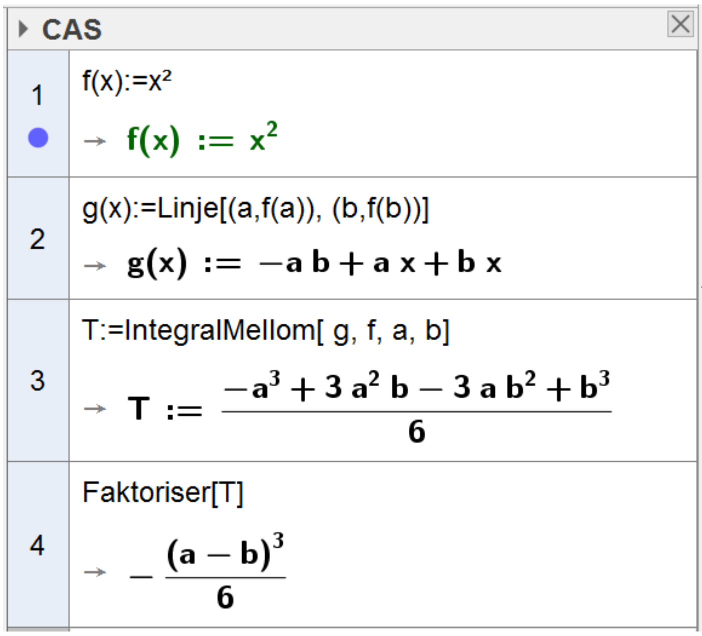
$$f(x) = x^2$$

Punktene $A(a, a^2)$ og $B(b, b^2)$ der $a < b$, ligger på grafen til f. Se figur 1 nedenfor.



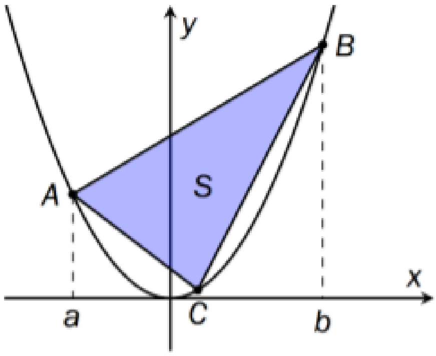
Figur 1

a) Grafen til f og linjestykket AB avgrenser et flatestykke med areal T.
Bruk CAS til å bestemme T uttrykt ved a og b.



Vi bruker CAS og finner $T = -\dfrac{(a-b)^3}{6}$

Punktet C på grafen har koordinatene $\left(c, c^2\right)$, der $c = \frac{a+b}{2}$. Se figur 2 nedenfor.



Figur 2

b) Bruk CAS til å vise at arealet S av $\triangle ABC$ er $S = \frac{1}{8}(b-a)^3$.

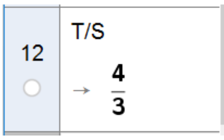
Vi velger først å finne linjene gjennom CA og CB. Deretter finner vi arealet mellom disse to linjene og grafen til f. Arealet S er da differansen av arealet T vi fant i a) og arealet mellom disse to linjene.

5	c:=(a+b)/2 $\rightarrow\ c := \frac{1}{2}(a+b)$
6	h(x):=Linje[(c, f(c)),(a,f(a))] $\rightarrow\ h(x) := -\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}ab + \frac{3}{2}ax + \frac{1}{2}bx$
7	i(x):=Linje[(c,f(c)), (b,f(b))] $\rightarrow\ i(x) := -\frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ax + \frac{3}{2}bx$
8	S:=T-(IntegralMellom[h, f, a, c]+IntegralMellom[i, f, c, b]) $\rightarrow\ S := -\frac{1}{8}a^3 + \frac{1}{8}b^3 - \frac{3}{8}ab^2 + \frac{3}{8}a^2b$
9	Faktoriser[S] $\rightarrow\ -\frac{(a-b)^3}{8}$
10	Sjekker om dette uttrykket er det samme som 1/8(b-a)^3
11	S==1/8(b-a)³ $\rightarrow$ **true**

Linje 11 gir at $S=\frac{1}{8}(b-a)^3$

c) Bestem forholdet $\frac{T}{S}$.

Vi bruker CAS og finner at forholdet $\frac{T}{S}=\frac{4}{3}$



Oppgave 4 (4 poeng)

I en bygd med 1200 innbyggere spres et rykte. La y være antall innbyggere som kjenner til ryktet ved tiden t, der t er tiden målt i dager etter at ryktet oppsto.

Vi antar at ryktet spres med en fart som til enhver tid er proporsjonal med produktet av antall innbyggere som kjenner ryktet, og antall innbyggere som ikke kjenner det. Proporsjonalitetskonstanten har verdien $0{,}0006$.

Ved tiden $t=0$ var det kun én person som kjente til ryktet.

a) Sett opp en differensiallikning som beskriver situasjonen over.
Vi har følgende opplysninger fra oppgaveteksten

- y er antall innbyggere som kjenner til ryktet t dager etter at det oppsto
- $(1200-y)$ er antall innbyggere som ikke kjenner til ryktet
- y' er farten ryktet spres med.

Vi får oppgitt at ryktet spres med en fart som til enhver tid er proporsjonal med produktet av antall innbyggere som kjenner ryktet, og antall innbyggere som ikke kjenner det.

Det gir oss følgende differensiallikning

$$y'=0{,}0006\cdot y\cdot(1200-y) \quad \text{der} \quad y(0)=1$$

b) Hvor lang tid tar det før halve bygda kjenner til ryktet?
Vi løser differensiallikning i CAS.

1	LøsODE[y'=0.0006y*(1200-y), y, t,(0,1)] $\rightarrow\ y = \frac{1200}{1199\, e^{-18 \cdot \frac{t}{25}} + 1}$
2	1200 / (1199e^(-18 t / 25) + 1)=1200/2 $\checkmark\ \frac{1200}{1199\, e^{-18 \cdot \frac{t}{25}} + 1} = \frac{1200}{2}$
3	1200 / (1199e^(-18 t / 25) + 1) = 1200 / 2 ,t=1 NLøs: $\{t = 9.85\}$

Linje 3 viser at det tar nesten 10 dager før halve bygda kjenner rykte.